§ Oscilador Harmônico amortecido (1-dim)

Medindo a posição x apartir da posição de equilíbrio, a força restauradora é dada por:

$$F = -kx.$$

Sabemos que o oscilador executa oscilações sinoidais simples em torno da posição de equilíbrio.
Mais realístico: incluir forças de atrito na forma mais simples:

$$F_a = -bv = -b\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

A eq. de Newton se escreve como:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -kx - b\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

ou equivalentemente:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}(t) + b\frac{dx}{dt}(t) + kx(t) = 0,} \qquad (*)$$

que, de maneira geral, descreve oscilações amortecidas.

Se o oscilador estiver sujeito a uma força adicional dependente do tempo, teremos:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}(t) + b\frac{dx}{dt}(t) + kx(t) = F(t).} \qquad (**)$$

A eq. (*) é uma "equação diferencial linear com coeficientes constantes homogênea". Em contrapartida, (**) é uma EDL com coeficientes constantes não-homogênea.

Dividindo pela massa, a eq. (**) fica:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

▸ Def. $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$, frequencia natural do OH

$2\alpha \equiv \frac{b}{m}$, coeficiente de amortecimento

$F(t)/m \equiv f(t)$.

Escreveremos uma forma geral dessa equação, na forma:

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\,\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t),$$

cujas soluções estudaremos na próxima seção.

De grande conveniência será introduzir números complexos, particularmente quando o OH é forçado por uma força sinoidal. Veremos várias aplicações físicas deste problema.

TEXTO DE F-313

BASE MATEMÁTICA PARA A TEORIA DO OSCILADOR HARMÔNICO

I- REVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS:

Tanto para a teoria do oscilador harmônico, quanto para conceitos de física ondulatória existe uma grande vantagem em se trabalhar com números complexos. De início estes podem parecer encobrir os conceitos físicos dentro de uma matemática pouco familiar, mas, uma vez passada a novidade, a simplificação - real das manipulações se torna evidente.

O número complexo A é definido como um par ordenado de números reais:

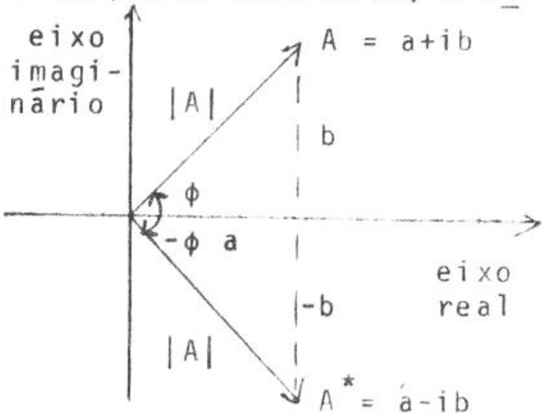
$i^2 = -1$

$$A \equiv a + i\,b \equiv (a,b) \qquad (1)$$

Os dois números reais a e b são chamados, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de A. O módulo do número complexo A é definido por:

$$|A| \equiv \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2)$$

Representação Polar: Da mesma forma que um número real é representado geomètricamente por um ponto numa reta, o número complexo é representado por um ponto num plano, com componentes Cartesianas a e b.



A partir da fórmula de Euler,

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi\,, \qquad (3)$$

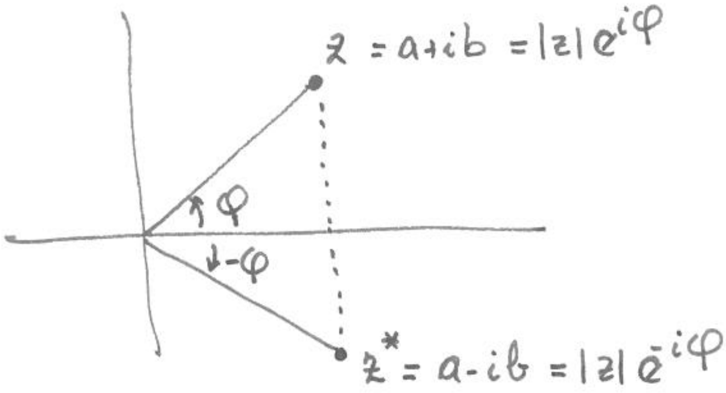
vê-se que qualquer número complexo A pode ser escrito:

$$A = |A|\cos\phi + i\,|A|\,\mathrm{sen}\,\phi = |A|\,e^{i\phi} \qquad (4)$$

com:

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{b}{a} \qquad (5)$$

Chamamos (4) a representação polar de A. O ângulo ϕ é denominado de fase ou argumento de A.


$z = a+ib = |z|e^{i\varphi}$
φ
$-\varphi$
$z^* = a-ib = |z|e^{-i\varphi}$

Complexo Conjugado: Definimos o complexo conjugado de $A = a + i\,b$ por:

$$A^* \equiv a - i\,b \tag{6}$$

Temos imediatamente as relações:

$$a = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{A - A^*}{2i} \tag{7}$$

Podemos verificar analiticamente ou a partir da figura que

$$\left[\,|A|\,e^{i\phi}\right]^* = |A|\,e^{-i\phi} \tag{8}$$

As 4 Operações: A soma e subtração de dois números complexos é definida por:

$$A \pm A' = (a + i\,b) \pm (a' + i\,b') = (a \pm a') + i\,(b \pm b') \tag{9}$$

A soma é comutativa e associativa.

A definição do produto de dois números complexos é a mesma que a do produto de binômios algébricos, guardando-se a regra que:

$$i.i = -1 \tag{10}$$

Assim:

$$(a+i\,b).(a'+i\,b') = aa'+(i.i)bb'+i\,a\,b'+i\,a'b$$

$$= \underbrace{aa'-bb'}_{\text{parte real}} + i\,\underbrace{(a\,b'+b\,a')}_{\text{parte imaginária}} \tag{11}$$

Essa definição permite relacionar $|A|^2 = A.A^*$. Sempre que temos produtos é mais fácil utilizar a representação polar, pois podemos verificar que:

$$\left[\,|A|\,e^{i\phi}\right].\left[\,|A'|\,e^{i\phi'}\right] = |A|\,|A'|\,e^{i\left[\phi + \phi'\right]} \tag{12}$$

Então, para multiplicar dois números complexos, basta tomar o produto dos módulos e a soma das fases. As operações inversas também ficam mais fáceis na representação polar. Assim temos o quociente entre dois números complexos:

$$|A|e^{i\phi} \Big/ |A'|e^{i\phi'} = \frac{|A|}{|A'|}\,e^{i(\phi - \phi')} \tag{13}$$

e a enésima raiz:

$$\sqrt[n]{|A|\ e^{i\phi}} = \sqrt[n]{|A|}\ e^{i(\phi/n)} \qquad (14)$$

EX: Mostre que $[A+B]^* = A^* + B^*$ e que $[A.B]^* = A^*.B^*$

A introdução de números complexos é essencial ao estudo das funções analíticas. O nosso interêsse imediato no seu uso vem do fato de ser muito mais fácil lidar com exponenciais complexas do que com funções trigonométricas. O fato de que, uma vez obtida uma igualdade entre dois números complexos, podemos igualar tanto as partes reais quanto as imaginárias, permite trabalhar o tempo todo com funções complexas e só no final tirar a parte real (física) do resultado.

EX: Da igualdade:

$$e^{i z_1} + e^{i z_2} = \exp(i\ \frac{z_1 + z_2}{2}) \left[\exp(i\ \frac{z_1 - z_2}{2}) + \exp(-i\ \frac{z_1 - z_2}{2}) \right]$$

Podemos tirar a parte real, obtendo:

$$\cos z_1 + \cos z_2 = \mathrm{Re} \left[e^{i z_1} + e^{i z_2} \right]$$

$$= \mathrm{Re}\{\exp(i\ \frac{z_1 + z_2}{2}) \left[\exp(i\ \frac{z_1 - z_2}{2}) + \exp(-i\ \frac{z_1 - z_2}{2}) \right] \}$$

$$= \mathrm{Re}\{\exp(i\ \frac{z_1 + z_2}{2})\ .\ 2 \cos \frac{z_1 - z_2}{2}\}$$

$$= 2 \cos \frac{z_1 - z_2}{2}\ \mathrm{Re}\ \{\exp(i\ \frac{z_1 + z_2}{2})\ \}$$

$$= 2 \cos \frac{z_1 - z_2}{2}\ \cos \frac{z_1 + z_2}{2}$$

II- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM:

São todas as equações diferenciais da forma:

$$a_2\ (t)\ \ddot{x} + a_1\ (t)\ \dot{x} + a_o\ (t)\ x = F\ (t), \qquad (15)$$

onde cada ponto sobre o x significa uma derivação com relação a t. As equações de movimento de uma partícula que se move ao longo de uma reta são da forma:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F(x,\dot{x},t) \qquad (16)$$

Assim, se a força depender só de x , de $\dot{x}$, ou de t , ou de uma combinação linear dessas três variáveis caimos numa equação linear de segunda ordem. A teoria dessas equações é válida para o caso em que a variável independente t é um número complexo e a variável dependente x também é um número complexo. Na física, as grandezas são todas reais, de maneira que as equações diferenciais que aparecem tem coeficientes reais e as soluções procuradas também são funções reais.

Entretanto, em muitos casos vale apena trabalhar com as funções complexas e só no final usar a parte real da solução matemática como solução do problema físico. A demonstração de que isso é possível é simples:

Suponha que encontramos uma solução complexa: $x(t) = G_r(t) + i\,G_i(t)$ da equação diferencial (15), onde os coeficientes $a_n(t)$ são reais e o termo $F(t) = F_r(t) + i\,F_i(t)$ é complexo. Daí sabemos que:

$$a_2(t)\,(\ddot{G}_r(t) + i\,\ddot{G}_i(t)) + a_1(t)\,(\dot{G}_r(t) + i\,\dot{G}_i(t)) +$$
$$a_o(t)(G_r + i\,G_i) = F_r(t) + i\,F_i(t) \qquad (17)$$

Igualando as partes reais, temos então:

$$a_2(t)\,\ddot{G}_r(t) + a_1(t)\,\dot{G}_r(t) + a_o(t)\,G_r(t) = F_r(t), \qquad (18)$$

ou seja, a parte real da solução é solução da parte real da equação.

<u>Princípio da Superposição</u>: é a base teórica para o estudo das equações lineares. Para o caso particular da equação (15) o princípio diz que se $x_1(t)$ for uma solução da equação:

$$a_2(t)\,\ddot{x} + a_1(t)\,\dot{x} + a_o(t)x = F_1(t)$$

e se $x_2(t)$ for uma solução da equação:

$$a_2(t)\,\ddot{x} + a_1(t)\,\dot{x} + a_o(t)x = F_2(t),$$

onde os coeficientes $a_n(t)$ são os mesmos em ambas as equações, - então a função $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ é solução da equação:

$$a_2(t)\ \ddot{x} + a_1(t)\ \dot{x} + a_o(t)\ x = F_1(t) + F_2(t).$$

Demonstração: Dizer que $x_1(t)$ é solução da 1ª equação significa que: $a_2(t)\ \ddot{x}_1 + a_1(t)\ \dot{x}_1 + a_o(t)\ x_1(t) = F_1(t)$.
Do mesmo modo vemos que:

$$a_2(t)\ \ddot{x}_2 + a_1(t)\ \dot{x}_2 + a_o(t)\ x_2(t) = F_2(t).$$

Somando termo a termo essas duas equações, temos:

$$a_2(t)\ (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + a_1(t)\ (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + a_o(t)\ (x_1 + x_2) = F_1 + F_2$$

que é o resultado desejado.

Se temos uma equação em que o termo $F(t) = 0$, dizemos que a equação diferencial é homogênea e no caso contrário que ela é não-homogênea. O princípio da superposição diz então que dadas duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da mesma equação homogênea, a - sua soma também será solução, pois nêsse caso: $F_1(t) = F_2(t) = F_1 + F_2 = 0$. É fácil também verificar que se multiplicarmos uma solução de uma equação homogênea por qualquer - constante, o produto também será uma solução. Unindo esses dois - resultados, vemos que, dadas duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de uma equação homogênea, qualquer combinação linear $x(t) = C_1\ x_1(t) + C_2\ x_2(t)$ por elas formada será também uma solução da equação homogênea.

Solução Geral: É um fato, que não será provado aqui, que, para uma equação diferencial de 2ª Ordem, a solução mais geral que pode ser encontrada contém duas constantes arbitrárias. Vemos assim que se conhecermos duas soluções independentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de uma equação homogênea (ou seja, o caso em que o quociente $x_2(t)/x_1(t)$ não for constante), então a solução geral será - $x_h(t) = C_1\ x_1(t) + C_2\ x_2(t)$; onde as constantes C_1 e C_2 são arbitrárias.

Se a equação não for homogênea, o princípio de superposição mostra que qualquer solução $x_h(t)$ da equação homogênea correspondente (a equação que tem os mesmos coeficientes $a_n(t)$ mas $F(t) = 0$), superposta a uma solução particular qualquer da equação não-homogênea ($x(t) = x_n(t)$), também será uma solução da equa equação não-homogênea. Isto é, se $x_n(t)$ é solução de:

$a_2(t)\ \ddot{x} + a_1(t)\ \dot{x} + a_o(t)\ x = F(t)$ e x_h é a solução geral de:

$a_2(t)\ \ddot{x} + a_1(t)\ \dot{x} + a_o(t) = 0$

então $x(t) = x_n(t) + x_h(t)$ é também uma solução da equação não homogênea. Como essa solução contém as duas constantes arbitrárias da solução da equação homogênea, encontramos assim a solução geral da equação não-homogênea.

<u>Equação com Coeficientes Constantes</u>: Uma equação - que aparece com frequência tanto na mecânica como na teoria de - circuitos é a equação linear com coeficientes constantes:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = F(t) \qquad (19)$$

Para a equação homogênea ($F(t) = 0$), temos sempre a solução: $x_h(t) = e^{Pt}$. A constante p é determinada substituindo essa solução tentativa na equação homogênea, donde se obtém:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_o^2 = 0 \qquad (20)$$

As duas soluções dessa equação quadrática são:

$$p = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \qquad (21)$$

Temos então três casos a discutir:

1) $|\alpha| > \omega_o$ <u>(superamortecimento)</u>: há duas soluções reais:

$$x_1(t) = e^{\left[-\alpha + \sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}\right]t} \quad ; \qquad x_2(t) = e^{\left[-\alpha - \sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}\right]t} \qquad (22)$$

Se $\alpha > 0$, ambas essas soluções tenderão a zero quando $t \to \infty$, - de forma que a solução geral:

$$x_h(t) = e^{-\alpha t}\left[C_1\ e^{+\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}\ t} + C_2\ e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}\ t}\right] \qquad (23)$$

também tende a zero quando $t \to \infty$.

2) $|\alpha| < \omega_o$ (<u>amortecimento fraco</u>): Definindo então:

$$i\ \omega_1 = i \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \ , \qquad (24)$$

vemos que as duas soluções são complexas. A solução geral do problema físico será a parte real da solução complexa:

$$x_h(t) = \mathrm{Re}\left[C_1\ e^{(-\alpha + i\ \omega_1)t} + C_2\ e^{(-\alpha - i\ \omega_1)t} \right] \qquad (25)$$

Mas as constantes C_1 e C_2 são complexas, cabendo a representação polar:

$$C_1 = |C_1|\ e^{i\ \theta_1} \quad ; \quad C_2 = C_2\ e^{-i\ \theta_2} \qquad (26)$$

donde:

$$x_h = e^{-\alpha t}\ \mathrm{Re}\left[|C_1|\ e^{i(\omega_1 t+\theta_1)} + |C_2|\ e^{-i(\omega_1 t+\theta_2)} \right]$$

$$= e^{-\alpha t}\left[|C_1|\ \cos(\omega_1 t+\theta_1) + |C_2|\ \cos(\omega_1 t+\theta_2) \right] \qquad (27)$$

Aqui ocorre um fato estranho: a solução geral de equação homogênea parece conter quatro constantes arbitrárias em vez das duas previstas pela teoria. A discrepância vem do fato que cada constante complexa equivale a duas constantes reais. Se desenvolvermos:

$$C\ \cos\ (\omega t + \theta) = (C\ \cos\ \theta)\cos\ \omega t + (-\mathrm{sen}\theta C)\mathrm{sen}\ \omega t =$$

$$= A\ \cos\ \omega t + B\ \mathrm{sen}\ \omega t \ ,$$

onde A e B são constantes arbitrárias, vemos que obtivemos a solução da equação homogênea como uma superposição de duas soluções gerais. Obviamente basta uma solução geral, de modo que temos finalmente:

$$x_h(t) = C\ e^{-\alpha t}\ \cos(\omega_1 t + \theta) \qquad (28)$$

Se $\alpha = 0$, vê-se que $x_h(t)$ é uma oscilação harmônica simples, - com frequência $\omega_1 = \omega_o$. Isso é o que se poderia esperar, já que nesse caso a equação homogênea é de fato a equação de um oscilador harmônico simples. No caso geral temos oscilações amortecidas com o tempo.

3) $\alpha = \omega_o$ (<u>amortecimento crítico</u>): Temos nesse caso apenas uma - solução: $p = -\alpha$. É fácil de mostrar que nesse caso $x_2 = t\, e^{-\alpha t}$ também é uma solução da equação homogênea.
A solução geral é então:

$$x_h(t) = C_1\, e^{-\alpha t} + C_2\, t\, e^{-\alpha t} \qquad (29)$$

$\alpha = \omega_o$ é o menor valor de α para o qual a solução decai com o - tempo sem efetuar oscilações.

<u>Equação Não Homogênea</u>: Existem métodos gerais para se determinar uma solução particular da equação não homogênea - qualquer que seja a forma do termo não homogêneo $F(t)$ na equação (19)

Como vimos deverá esta ser somada à solução geral da equação homogênea para se obter a solução geral da equação não homogênea. Para as aplicações na física, o caso mais importante é quando o termo não homogêneo é oscilatório. Então - no caso mais simples procura-se uma solução para a equação:

$$\ddot{x} + 2\,\alpha\,\dot{x} + \omega_o^2\, x = F \cos(\omega t + \theta) \qquad (30)$$

Como vimos antes, é mais fácil resolver a equação:

$$\ddot{x} + 2\,\alpha\,\dot{x} + \omega_o^2\, x = F\, e^{i(\omega t + \theta)} \qquad (31)$$

e depois usar a parte real da solução obtida. Tentamos a solução:

$x_n(t) = A\, e^{i(\omega t + \theta)}$, que substituida na equação acima - nos dá uma equação para o coeficiente A:

$$A = F \Big/ (-\omega^2 + i\, 2\,\alpha\,\omega + \omega_o^2) \qquad (32)$$

A solução particular é então:

$$x_n(t) = \frac{F\; e^{i(\omega t + \theta)}}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i\, 2\,\alpha\,\omega} \qquad (33)$$

A maneira mais fácil de obter a parte real dessa solução é escrever o denominador complexo na representação polar:

$$D = \omega_o^2 - \omega^2 + i\, 2\,\alpha\,\omega = |D|\, e^{i\phi} \qquad (34)$$

onde:

$$|D|^2 = (\omega_o^2 - \omega^2) + (2\,\alpha\,\omega)^2 \qquad (35)$$

e:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2\alpha\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \qquad (36)$$

Então:

$$\operatorname{Re}\left[x_n(t)\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{F e^{i(\omega t + \theta)}}{|D|\, e^{i\phi}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{F}{|D|}\, e^{i(\omega t + \theta - \phi)}\right]$$

$$\operatorname{Re}\left[x_n(t)\right] = \frac{F \cos(\omega t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} , \qquad (37)$$

e a solução geral fica:

$$x(t) = \frac{F \cos(\omega t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} + x_h(t) \qquad (38)$$

Nos casos fisicamente relevantes, temos sempre $\alpha>0$, donde ocorre que:

$$\lim_{t \to \infty} x_h(t) = 0 , \qquad (39)$$

enquanto que a solução particular oscila com o tempo sem decair. Por essa razão chama-se a solução particular da equação não homogênea de <u>solução permanente</u>, enquanto os outros termos são denominados de <u>transientes</u>. Note-se que a solução permanente não contém nenhuma constante arbitrária, logo <u>a solução permanente não depende das condições iniciais</u>.

<u>Força Periódica Geral</u>: De acôrdo com o <u>teorema de Fourier</u> podemos decompor qualquer função periódica numa superposição de senos e cossenos. Na sua forma mais compacta, temos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{i \frac{2n\pi}{\tau} t} , \qquad (40)$$

se a função f(t) se repete depois de cada período τ .

Utilizando o princípio da superposição para a solução do oscilador harmônico forçado, vemos que a solução de:

$$\ddot{x} + 2\alpha\,\dot{x} + \omega_o^2\,x = F_1\,e^{i\,\omega_1 t} + F_2\,e^{i\,\omega_2 t} \tag{41}$$

é:

$$x_n(t) = \frac{F_1\,e^{i(\omega_1 t + \phi_1)}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_1^2)^2 + (2\alpha\omega_1)^2}} + \frac{F_2\,e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_2^2) + (2\alpha\omega_2)^2}} \tag{42}$$

O teorema da superposição se aplica,qualquer que seja o número - de termos que compoem a parte não homogênea de equação. Então no caso geral de uma força periódica temos:

$$\ddot{x} + 2\alpha\,\dot{x} + \omega_o^2\,x = \sum_n f_n\,e^{i\,\frac{2n\pi}{\tau}t} \tag{43}$$

com a solução:

$$x_n(t) = \sum_n f_n \frac{e^{i(\frac{2n\pi}{\tau}t + \phi_n)}}{\sqrt{\left[\omega_o^2 - (\frac{2n\pi}{\tau})^2\right]^2 + (2\alpha.\frac{2n\pi}{\tau})^2}}$$

onde:

$$\phi_n = \frac{2\alpha\,.\,\frac{2\pi n}{\tau}}{\omega_o^2 - (\frac{2n\pi}{\tau})^2} \tag{44}$$